

5- امل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية بطريقة النسخ

المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية في هذا الشكل

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0 \quad (1) \quad \text{حيث } w \text{ الدالة المجهولة و } z \text{ المتحول المستقل}$$

(5) - 1- طريقة النسخ العادية والنسخ المشاركة للمعادلة التفاضلية (1)

النقطة العادية: نقول بالتعميم كنقطة  $z = z_0$  أنها نقطة عادية للمعادلة (1) إذا كان

كل من الدالتين  $p(z)$  و  $q(z)$  تحليليتين عند تلك النقطة (أي صغريتين)

ونقول إن كل نقطة غير عادية أنها نقطة متمايزة للمعادلة

نفسك مع المعادلة العادية

$$\left[ w'' + \frac{z+2}{z-1} w' + \frac{z}{(z+1)^2} w = 0 \right]$$

$$p(z) = \frac{z+2}{z-1} \quad \text{و} \quad q(z) = \frac{z}{(z+1)^2}$$

حيث نلاحظ أن

منلاحظ أن  $z = -1$   $z = 1$  نقطتان شاذتان لهذه المعادلة

وكل نقطة غير عادية النقطتين من المستوى  $z$  في نقطة عادية للمعادلة

(أختر الدوال)

(5) - 2- الحل بجوار نقطة عادية

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0 \quad (1) \quad \text{لكن لدينا المعادلة التفاضلية}$$

$$[w(z_0) = C_0 \quad \text{و} \quad w'(z_0) = C_1] \quad (2) \quad \text{والمشروط الابتدائي}$$

وبفرض أن الدالتين  $p(z)$  و  $q(z)$  تحليليتان في النقطتين

بمقدورنا إيجاد حل تحليلي وحيد في  $D(z_0, C)$  من الشكل

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

حيث  $a_n$  ثوابت نحتاج تعيينها بدلالة  $C_0$  و  $C_1$

ويعطينا الحد العام للمعادلة (1) جوار نقطة العادية  $z = z_0$  على الشكل

$$w = A w_1 + B w_2$$

حيث  $A$  و  $B$  ثابتان اختياريان

$w_1$  و  $w_2$  حلان للمعادلة (1)

$$w'' - zw = 0 \quad (1)$$

بمثال أوجد حلًا للمعادلة التفاضلية

في جوار النقطة  $z=0$

$$[w(0)=1 \text{ و } w'(0)=0] \quad (2)$$

$$p(z)=0 \text{ و } q(z)=-z$$

والتان كليتان عند النقطة  $z=0$  وبالتالي  $z=0$  نقطة عادية للمعادلة (1).  
والحل يكون (قليبي ولي) هذا الشكل:

$$[w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n] \quad (3)$$

نشتق هذه العلاقة الرضوية مرتين بالنسبة لـ  $z$  ونعوض في المعادلة المعطاة فنجد:

$$(3) \Rightarrow w' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

$$w'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$$

نعوض في (1):

$$(1) \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} = 0$$

نبدل في المجموع الأول كل  $n$  بـ  $n+2$  وفي المجموع الثاني كل  $n$  بـ  $n-1$  (الناتج الأول) فيكون:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} z^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^n = 0$$

الآن بالنسبة الحد الأول من المجموع الأول نجد  $(n=0)$ :

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - a_{n-1}] z^n = 0$$

بالمطابقة مع الطرف الأيمن يكون لدينا:

$$2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$$

فأضرب:

دعونا نكتب  
حسابات المثال  
 $a_n$

$$a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}$$

$\forall n \geq 1$

وهذا الدستور التدريجي يكون

$$n=1 \Rightarrow a_3 = \frac{a_0}{3 \times 2}$$

$$n=2 \Rightarrow a_4 = \frac{a_1}{4 \times 3}$$

$$n=3 \Rightarrow a_5 = \frac{a_2}{5 \times 4} = 0 \quad (a_2=0)$$

$$n=4 \Rightarrow a_4 = \frac{a_0}{2 \times 3 \times 5 \times 6}$$

وهكذا - - - - - (صياغة رياضية تعيد)

وبملاحظة الشرائح فيجاء صيغة  $a_n (n=0, 1, \dots)$  تتعین بدلالة التابعتين  $a_0, a_1$  وبالتالي الحل العام للمعادلة المعطاة هو:

$$(3) \Rightarrow w = a_0 \left[ 1 + \frac{1}{2 \times 3} Z^3 + \frac{1}{2 \times 3 \times 5 \times 6} Z^6 + \dots \right] + a_1 \left[ Z + \frac{1}{4 \times 3} Z^4 + \dots \right]$$

في هذا المثال الحلول الخاصة تكون 0،

$$w_1 = 1 + \frac{1}{2 \times 3} Z^3 + \frac{1}{2 \times 3 \times 5 \times 6} Z^6 + \dots$$

$$w_2 = Z + \frac{1}{3 \times 4} Z^4 + \dots$$

وباستخدام الحل الخاص الموافق للشروط الابتدائية لنبدل له عبارة الحل العام (A) كل  $Z \neq 0$  فليد رياضي  $w$  على صيغة الحل العام مع الشروط الابتدائية:

$$w(0) = 1 = a_0 [1 + 0 + 0 + \dots] + a_1 [0 + 0 + 0 + \dots]$$

$$[a_0 = 1] \quad \text{إذن}$$

ولمسا  $a_1$  نشتق الحل (A) مرة بالسببية لـ  $Z$ .

$$w' = a_0 \left[ 0 + \frac{1}{2} Z^2 + \frac{1}{2 \times 3 \times 5} Z^5 + \dots \right] + a_1 \left[ 1 + \frac{1}{3} Z^3 + \dots \right]$$

$$w'(0) = 0 = a_0 [0] + a_1 [1 + 0 + 0 + \dots]$$

$$[a_1 = 0]$$

والحل الموافق يكون

$$(4) \Rightarrow w = w_1 = 1 + \frac{Z^3}{2 \times 3} + \frac{Z^6}{2 \times 3 \times 5 \times 6} + \dots$$

وهو المطلوب

(5) - 3 - الحل في جوار نقطة مفردة منتظمة

تبرهن: نقول عند النقطة  $Z = Z_0$  أنهما نقطة مفردة منتظمة للمعادلة (A) إذا كان كلا من الدالتين  $p(Z)$  و  $q(Z)$  كليبتان عند هذه النقطة فيما عدا ذلك تكون النقطة مفردة منتظمة غير منتظمة.

فيكون  
معي  
نرمز  
بالنقطة

والتي هي الحالة يوجد حل واحد للمعادلة التفاضلية:

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0 \quad \text{--- ٤١٣}$$

وكانت الشروط الابتدائية التالية:

$$[w(z_0) = c_0 \text{ و } w'(z_0) = c_1] \quad \text{--- ٤٢٣}$$

أو جوار النقطة الشاذة النظامية قابلية للنشر (كلاهما) مع السلسلة:

$$[w = (z - z_0)^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n]$$

حيث تكون السلسلة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

مقاربة على الأقل في المجال  $|z - z_0| < \alpha$

ولذلك نجد الحل في جوار النقطة الشاذة النظامية فإننا ننشر حسب دستور (عالم - لوران) كلاهما اللتين:

$$(z - z_0)^2 q(z) \text{ و } (z - z_0) p(z)$$

ونكتب فيها الخواص التالية:

$$p_0, p_1, p_2 \text{ و } q_0, q_1, q_2$$

ويمكن تخمين الحل في جوار النقطة الشاذة النظامية في الخطوات التالية:

١) نفرض أن الحل الخاص هو الشكل:

$$w = (z - z_0)^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \text{ و } \lambda \in \mathbb{C}$$

نشتق هذه المعادلة مرتين ونعوض في المعادلة ٤١٣

وبذلك نحصل على أقل قدر من  $z$  (عندما  $n=0$ ) مساوياً للصفر فإننا نحصل على

$$[F(\lambda) = \lambda^2 + (p_0 - 1)\lambda + q_0 = 0] \text{ المعادلة}$$

ويمثل المعادلة المميزة للمشتق وتمتلك الحالة العامة جذرين  $(\lambda_1, \lambda_2)$

٢) إذا كانت هذه الجذور مختلفة من بعضها بعدد غير صحيح أي  $(\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z})$

فيكون الحل العام للمعادلة ٤١٣ بالشكل:

$$w = A(z - z_0)^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + B(z - z_0)^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

حيث  $A$  و  $B$  ثابتان اختياريان



(3) إذا كان الزخم بين الجزيئين يتغير إلى عدد صحيح أي  $(\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{Z})$  فإننا نستعمل الحل الخاص  $w_1 = (Z - Z_0)^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (Z - Z_0)^n$  (تقريباً) أو كمنهج رتبة المعادلة 3 إذ وذلك بإجراء التحويل التالي:

$$w_2 = w_1 \cdot u$$

حيث  $u$  دالة مجهولة يطلب تعيينها. وعند هذا الحل العام للمعادلة 3 في صيغة  $w$ .

$$w = A w_1 + B w_2$$

حيث  $A$  و  $B$  ثابتان اختياريان.

بالمثل  $Z=0$  هو الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$Z^2(1+Z)w'' - Z(1+2Z)w' + (1+2Z)w = 0 \quad (1)$$

عند  $Z=0$  هو الحل.

الحل بعد تقسيم المعادلة المعطاة طرفيها على  $Z^2$  فنجد  $C$ :

$$w'' - \frac{1+2Z}{Z(1+Z)} w' + \frac{(1+2Z)}{Z^2(1+Z)} w = 0$$

نلاحظ هنا

$$p(Z) = -\frac{1+2Z}{Z(1+Z)}$$

$$q(Z) = \frac{1+2Z}{Z^2(1+Z)}$$

$$Z p(Z) = -\frac{1+2Z}{1+Z}$$

هذا هو  $C$ .

$$Z^2 q(Z) = \frac{1+2Z}{1+Z}$$

هذا هو  $C$  قليلتين عند النقطة  $Z=0$ ، والتي  $Z=0$  نقطة مفردة

نلاحظ صيغة المعادلة المعطاة (1) هو عند الحل يكون من الشكل (عند  $Z=0$ )

$$w = Z^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n Z^{n+\lambda}$$

نشتق مرتين العلاقة الأخيرة (صيغة الحل المجهول) بالنسبة لـ  $Z$  ونبدل في المعادلة المتناظرة

المعطاة (1) ثم تقسيم طرفيها على  $(Z^{\lambda})$  كما يلي:

بالاشتقاق  
بالنسبة لـ  $z$

$$W' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n z^{n+\lambda-1}$$

$$W'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+\lambda-1) a_n z^{n+\lambda-2}$$

بالتعويض  
①

$$(z^2 + z^3) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+\lambda-1) a_n z^{n+\lambda-2} + (-z - 2z^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n z^{n+\lambda-1} + (1+2z) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+\lambda-1) - (n+\lambda)+1] a_n z^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+\lambda-1) - 2(n+\lambda)+2] a_n z^{n+\lambda+1} = 0$$

وبالمقارنة على  $z^{\lambda}$  الطرفين نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+\lambda-1) - (n+\lambda)+1] a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+\lambda-1) - 2(n+\lambda)+2] a_n z^{n+1} = 0 \quad (*)$$

لإيجاد المعادلة المميزة للـ  $z$  تساوي الصفر (نفسها  $n=0$ ) كما يلي:

$$\lambda(\lambda-1) - \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda-1)^2 = 0 \quad \text{و} \quad a_0 \neq 0$$

$$\lambda = 1$$

إذن لها جذران (مزدوجان):

إذن  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \in \mathbb{Z}$ ، إذن نستعمل القدر التالي:

$$W_1 = z \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

ولإيجاد الدستور التكراري نجد أن المجموع التالي في (\*) كل  $n \geq 1$  بـ  $(n-1)$ ،  
للمقارنة بالـ  $z^{\lambda}$ .

ومن ثم نضع أمثلة  $z^n$  تساوي الصفر في الحدود الخطأية (كما يلي):

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+\lambda-1) - (n+\lambda)+1] a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} [(n-1+1)(n+\lambda-2) - 2(n-1+1)+2] a_{n-1} z^n = 0$$

ومنه بإفراج عامل مشترك في أمثلة الحدود الخطأية:

ويكون الدستور التكراري:

$$a_n = - \frac{(n+\lambda-1)(n+\lambda-1)+2}{(n+\lambda)(n+\lambda-1) - (n+\lambda)+1} a_{n-1} \quad \forall n \geq 1$$

بالاشتقاق  
بالنسبة لـ  $z$

من أجل  $a_n$  نجد  $a_{n+1}$   $a_{n+2} = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} a_{n-1}$  الدستور التكراري الخاص بمتسلسلة التوان

وهو حسب المعطيات

$$n=1 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = 0$$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = \frac{2}{9} \cdot a_2 = 0 \quad (a_2 = 0 \text{ c.v.})$$

$$n=4 \Rightarrow a_4 = 0$$

وبالتالي  $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = 0$

$$w = z \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \Rightarrow$$

$$w_1 = z [a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots]$$

$$w_1 = a_0 z$$

$$w_1 = z$$

وبفرض  $a_0 = 1$  نجد بأن الحد العام المطلوب

يكون  $w_1 = z$

$$w_2 = w_1 - u$$

ولمعرفة  $u$  المعادلة المبرهنة نشق  $u$  بدل هذه الصيغة في المعادلة المعطاة

$$z(1+z)u'' + u' = 0$$

فتحول إلى المعادلة

في معادلة خطية من الرتبة الثانية

كلها نقوم بتغيير ترتيبها ونضع

$$u' = v$$

$$z(1+z)v' + v = 0$$

الحد العام

$$u = A \ln z + B$$

$$\Rightarrow w_2 = w_1 - u = z - u$$

$$w_2 = B z + A z \ln z + A z^2$$

وبما أن الحد المطلوب هو

$$w = A w_1 + B w_2$$

$$w = A z + B [B z + A z \ln z + A z^2]$$

وهو المطلوب